

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y GEOGEBRA NUMERICAL THOUGHT AND GEOGEBRA

Roxana Auccahuallpa Fernández
Ph.D.

roxana.auccahuallpa@unae.edu.ec
roxaaf@gmail.com

Resumen

El pensamiento numérico en la educación matemática es la capacidad de hacer cálculos con fluidez, de hacer estimados y juicios sin el uso de algoritmos y cálculos complejos. D'Ambrosio (2013) sugiere que enseñar matemáticas – pensamiento numérico debe tener cuenta la realidad socio-cultural del estudiante, aprendizajes que trae de su casa y aprovechar ello para el desarrollo del pensamiento numérico. El propósito de esta conferencia es aportar con una nueva metodología para potenciar el pensamiento numérico en los estudiantes, para esto se ha diseñado una serie de actividades con el uso del software de GeoGebra que ayudará al pensamiento numérico en la educación matemática.

GeoGebra es una herramienta didáctica e interactiva que puede determinar mejores procesos de demostración, visualización y consolidación de conceptos necesarios para potenciar el pensamiento numérico. Este software educativo es un programa multimedial interactivo que puede convertirse en una poderosa herramienta pedagógica y didáctica que aproveche nuestra capacidad de hacer cálculos de manera sencilla y precisa. ¿Cómo se puede mejorar la comprensión de conceptos matemáticos utilizando GeoGebra como recurso didáctico para enriquecer el pensamiento numérico?

Palabras claves: pensamiento numérico, matemáticas, GeoGebra, enseñanza y aprendizaje

Abstract

Numerical thinking in mathematics education is the ability to do computations fluently, to make estimates and judgments without the use of complex algorithms and calculations. D'Ambrosio (2013) suggests that teaching mathematics - numerical thinking must take into account the socio-cultural reality of the student, learning that he brings from home and take advantage of this for the development of number thinking. The purpose of this conference is to provide a new methodology to enhance numerical thinking in students, for this a series of activities has been designed with the use of GeoGebra software that will help numerical thinking in mathematics education.

GeoGebra is a didactic and interactive tool that can determine better processes of demonstration, visualization and consolidation of concepts necessary to enhance numerical thinking. This educational software is an interactive multimedia program that can become a powerful pedagogical and didactic tool that takes advantage of our ability to do computations in a simple and precise way. How can the understanding of mathematical concepts be improved by using GeoGebra as a teaching resource to enrich number thinking?

Keywords: number thinking, mathematics, GeoGebra, teaching and learning

Introducción

La educación de la matemática en pleno siglo XXI no es la misma del siglo pasado, dado que los estudiantes no son los mismos que los de ayer y las necesidades y requerimientos para poder actuar eficazmente en el mundo actual tampoco son las mismas. Por ello, la enseñanza de las matemáticas ha cambiado y requiere de docentes contemporáneos que deban ir ajustando sus formas y estrategias de enseñanza a través de la incorporación de nuevas metodologías para estar acorde a la época.

En este sentido, a partir de la década del 70 del siglo pasado se pudo evidenciar diferentes teorías de enseñanza de las matemáticas que surgieron para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la disciplina poco entendible por los estudiantes, en particular, el desarrollo del pensamiento numérico en los estudiantes. Una de estas teorías, fue la Genesis Instrumental, en la que, Rabardel (1995) propone un enfoque en el que se describe la génesis del instrumento (tecnologías) por el sujeto, y resalta la importancia de la actuación humana que construye un instrumento mediante estructuras cognitivas. Por lo que, se ha visto conveniente hacer uso de una herramienta didáctica, interactiva y dinámica como lo es GeoGebra, la que permite desarrollar el pensamiento numérico de forma práctica y precisa en los estudiantes. Este trabajo se ha ido desarrollando a partir del grupo de investigación EUREKA 4i de la Universidad Nacional de Educación – UNAE en la formación del futuro docente y docentes en ejercicios con la integración en la práctica educativa el uso de GeoGebra como recurso didáctico para la enseñanza de la matemática en la Educación General Básica. Incluso, hemos visto la viabilidad del software en las aulas de matemáticas, no obstante, esta herramienta didáctica tiene diferentes vistas de trabajo en la que se puede potenciar el desarrollo del pensamiento numérico de forma natural y explícita.

De esta forma, la organización profesional de docentes de matemáticas de los Estados Unidos de América, por sus siglas NCTM, ha identificado el pensamiento numérico como un área de desarrollo cognitivo matemático que sirve para el desarrollo de los altos niveles de pensamiento matemático que se espera de los estudiantes. Es decir, este tipo de pensamiento se desarrolla a partir de conocer el origen y la evolución de los conceptos y las herramientas que pertenecen al ámbito matemático. El propósito de esta conferencia es aportar con una nueva metodología para potenciar el pensamiento numérico en los estudiantes, para esto se ha diseñado una serie de actividades con el uso del software de GeoGebra que ayudará al pensamiento numérico en la educación matemática. Para ello, es importante ir construyendo actividades que despierten en interés en el estudiante desarrollar el pensamiento numérico o razonamiento cuantitativo.

Desarrollo

La enseñanza de las matemáticas debe incorporar nuevas tecnologías de la información y la comunicación TIC en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, por ello, el uso de GeoGebra en la sala de clases de matemáticas permite potenciar en el estudiante el desarrollo del pensamiento numérico, geométrico y espacial (competencias matemáticas). (Maroto y Arias, 2019). Esto, brinda la oportunidad de

transformar el ambiente tradicional del sistema educativo en el área de matemáticas (libro de texto, pizarra y lápiz), llevándolo a un espacio de interacción y dinámico que conlleva al estudio comprensivo de las matemáticas y al desarrollo de

las capacidades que permiten en los estudiantes adquirir un aprendizaje significativo de las matemáticas y sus conceptos poco comprensibles.

En las ideas de Luis Rico (1996), los estándares básicos de competencias de las matemáticas dividen el pensamiento matemático en pensamiento numérico y pensamiento espacial, las cuales eran las dos maneras que históricamente se utilizaban para hacer matemáticas (a partir de los números y de la geometría). De allí, dichos pensamientos fueron subdivididos en: pensamiento numérico y los sistemas numéricos, pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas, pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos y el pensamiento espacial y los sistemas geométricos.

La presente conferencia trabaja el desarrollo del pensamiento numérico, la cual ha sido y sigue siendo un tema de discusión desde la comunidad de educadores en matemáticas como aquella capacidad que poseen los estudiantes para la resolución de problemas. Así pues, el pensamiento numérico, como capacidad matemática permite interpretar los números, sus símbolos, sus significados y sus relaciones, además, posibilita la realización de actividades cognitivas (configuración numérica, análisis de fenómenos, cuestiones y problemas que emplean elementos numéricos) que estructuran procesos complejos de pensamiento que le servirán al sujeto para comprender otros aspectos matemáticos. (Cárdenas-Soler, Piamonte-Contreras, y Gordillo- Catellanos, 2017)

Asimismo, este pensamiento se ha ido desarrollando como línea de investigación en la Didáctica de la Matemática, la cual se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos en el Sistema Educativo. Para Rico (1996), educador en matemáticas, el pensamiento numérico estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas. Por esto, el pensamiento numérico para Castro (1994) se ha trabajado en tres momentos: (1) de elaboración, codificación y comunicación de sistemas simbólicos con los que expresar los conceptos y relaciones de una estructura numérica; (2) la organización, sistematización y desarrollo de diferentes actividades cognitivas que surgen y encuentran un modo de actuación en el marco de una estructura numérica; (3) los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos, cuestiones y problemas que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica.

Al mismo tiempo, la educación en matemáticas para la década del 70 del siglo pasado trajo consigo nuevas metodologías y teorías para su comprensión de una ciencia poco entendible. Dado que, en muchas ocasiones, son los estudiantes quienes se enfrentan a una disciplina de símbolos y algoritmos que siguen reglas y normas poco comprensibles. En las palabras del filósofo y matemático inglés Alan Bishop (1999), las matemáticas son una de las materias escolares más importantes que los niños de hoy deben estudiar y, al mismo tiempo, una de las peor comprendidas por su simbología y abstracción de su contenido. Esto intimida en los educandos y hasta provoca miedos y fobia, a pesar de la importancia de su estudio; sin embargo, son pocas personas que se sienten cómodas con ellas.

Por otra parte, la educación matemática para el siglo XXI permite la incorporación de estrategias innovadoras como el uso de GeoGebra en el aula que faciliten el proceso de enseñanza de esta ciencia. Según Pabón Gómez, Nieto Sánchez y Gómez Colmenares (2015), esta estrategia motivara al estudiante a realizar una actividad de exploración a través de la modelación de un fenómeno aplicado a las ciencias, para que a través de la manipulación de las aplicaciones del software dinámico sea el estudiante, quien adquiera la capacidad de representar modelos en los que visualice, interprete y comunique de una manera crítica y reflexiva los resultados obtenidos. Desde este punto de vista, la matemática debe ser para el estudiante una herramienta que le permita responder a las necesidades del contexto y comprender su importancia en la solución de problemas, a la vez que transforma con ella la realidad del mismo (Guarnizo, 2015; Torres, 2009).

El uso del software de GeoGebra ofrece a los estudiantes la posibilidad de utilizar herramientas tecnológicas en su proceso de aprendizaje, con lo cual este tipo de estudiantes presenta unas competencias tecnológicas que no los excluye del ámbito laboral donde es habitual el uso de estas herramientas. En este sentido, la instrumentalización de GeoGebra ocurre cuando se le dota de potencialidades (actividades didácticas) y se le transforma para aplicaciones específicas como un recurso didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En este proceso, el estudiante construye esquemas mentales, asimilando esquemas existentes o produciendo nuevos esquemas para llevar a cabo la actividad existente (León-Salinas, 2017; Pari y Auccahuallpa, 2019). Asimismo, GeoGebra ayuda a los estudiantes a realizar comprobaciones, construcciones, incluso, visualizar los comportamientos - resultado de sus mediciones, y con esto construir argumentos para realizar sus discusiones. En resumen, la tecnología juega un papel importante en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas puesto que permite a los estudiantes comprobar sus conjeturas y las predicciones. Con ello, desarrollar capacidades como el pensamiento numérico, espacial y otros.

Actividad 1. Representación de un número

La idea de número, siempre ha sido un concepto abstracto para los niños. A pesar de la enseñanza de los números, los niños en la primera infancia tienen problemas con respecto a la comprensión del número, esto se agudiza más cuando se le muestra los símbolos del número (1,2, 3,...). Por ello, se invita a los docentes desarrollar el sentido numérico en la primera infancia a partir del proceso del contar a partir de los seis aspectos determinantes del contar como: (1) Clasificar, (2) Ordenar, (3) secuenciar, (4) Correspondencia Biunívoca, (5) Conteo Estructurado y (6) conteo no estructurado (Van Luit y Van de Rijt, 1997).

Para desarrollar esta actividad, pensemos en un número no muy grande, por ejemplo 12; tomemos una hoja en blanco y anotemos sobre ella todas las imágenes, notaciones, dibujos, frases y símbolos que nos vengan a la cabeza y que asociemos con 12, que representen a 12. El número de las representaciones obtenidas es muy amplio; si compartimos nuestra información con las de otras personas podemos comprobar que la lista se prolonga extensamente y que entran a formar parte de ella conocimientos muy

Tabla 1. Representación del número 12



Simbólica

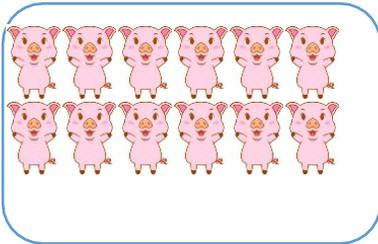
Tabla del 12

$12 \times 1 = 12$
$12 \times 2 = 24$
$12 \times 3 = 36$
$12 \times 4 = 48$
$12 \times 5 = 60$
$12 \times 6 = 72$
$12 \times 7 = 84$
$12 \times 8 = 96$
$12 \times 9 = 108$
$12 \times 10 = 120$

Tabla de multiplicar del 12



Reloj de 12 números



Cardinalidad del conjunto = 12 cerditos



Objetos que representa el 12



El número 12 como canal de TV

Nota: Elaboración propia (2020)

Para finalizar, la actividad 1, podemos realizar preguntas como:

- ¿Qué entendemos por pensamiento numérico? ¿Qué representa el número 12?.
- ¿Cuántas representaciones tiene el número 12? ¿Te atreves a decir un número de representaciones del número 12?

Actividad 2. GeoGebra en la operación de la suma de números.

El software de GeoGebra tiene diferentes vistas principales como: Algebraica, Vista CAS, Hoja de cálculo, vista gráfica, segunda vista gráfica, vista 3D y protocolo de construcción. Estas permiten desarrollar diferentes capacidades matemáticas en los estudiantes, es decir, para el caso de realizar operaciones de suma de números, los estudiantes pueden hacer uso de la vista CAS, en la cual el estudiante ingresa el número, por ejemplo $7 + 5$ y el resultado que proveerá GeoGebra será 12. Asimismo, para hacer uso de verificar diferentes tipos de sumas de números podemos realizar una construcción de la operación suma en la vista Gráfica, la cual provee el espacio de coordenadas y se pueden construir de forma general los números que se desean sumar. (Ver imagen 1)

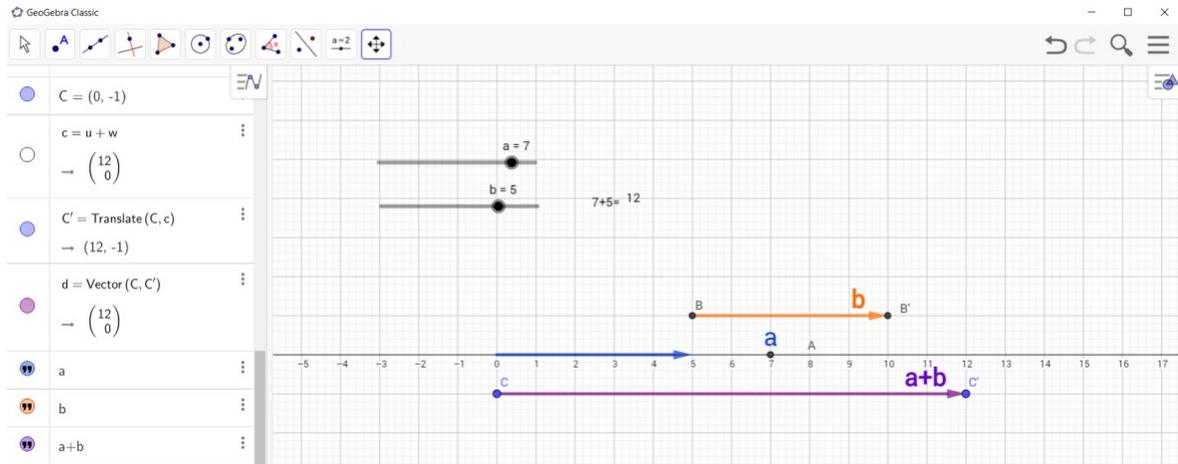


Figura 1. Suma de números. (Elaboración propia, 2020)

En efecto, el uso de la vista gráfica en GeoGebra permite tanto a docentes como estudiantes verificar suma de números a través de la construcción de deslizadores a , b y $a+b$, los cuales verifican cualquiera suma que se encuentra en los intervalos de los deslizadores al mover a y b . El resultado se observa en el deslizador $a+b$.

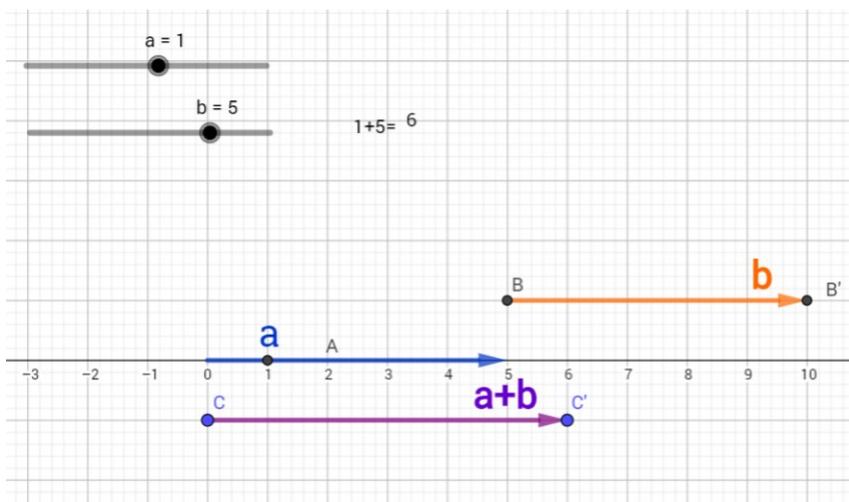


Figura 2. Operación de la suma de números. Uso de deslizadores. (Elaboración propia, 2020)

Actividad 3. Número aleatorio y GeoGebra.

Hablar de números aleatorios en la enseñanza de las matemáticas permite pensar en la variabilidad de números que pueden salir en un conjunto de números. Este conocimiento implica el uso del algebra abstracta, la cual no es fácilmente entendible por los estudiantes. Sin embargo, existen métodos que ayuden a los estudiantes sacar los números aleatorios del 1 al 6. Así, el método manual, tal como el uso de la ruleta permitirá extraer de forma aleatorio numero del 1 al 6 de la siguiente forma:



Lista de números del 1 al 6



Numero aleatorio que saldrá de forma manual

Figura 3. Números aleatorios del 1 al 6 de forma manual (Elaboración propia, 2020)

Por el contrario, para buscar números aleatorios de un conjunto de datos ‘n’ más grande, sería complicado encontrar de forma manual los números aleatorios. Por ello, podemos hacer uso de la vista de Hoja de Calculo en GeoGebra, la cual nos permitirá encontrar un numero infinito de posibles números aleatorios de un conjunto de datos {0, 1,2,3,4, 5,...n}. Para esto usamos la opción *numeroaleatorio* o *random()*, tal como se muestra en la imagen 4.

	A	B	C
1	6	1	5
2	2	5	4
3	1	4	3
4	2	1	6
5	3	1	6
6	2	3	1
7	1	4	1
8	5	3	6
9	2	2	5
10	6	1	4
11	1	6	1
12	3	5	2
13	5	2	1
14	1	6	4

Figura 4. Hoja de cálculo de las 52 posibles opciones de los números aleatorios del 1 al 6. (Elaboración propia, 2020)

Actividad 4. Verificar el valor del número irracional ‘e’

La constante matemática ‘e’ es uno de los números irracionales más importantes dentro de las matemáticas. Su valor aproximado es 2,71828... y aparece en gran parte de la matemática como los algoritmos naturales y funciones exponenciales. También, es conocido como el número de Euler o la constante de Napier. En este sentido, explicar el valor del número ‘e’ a los estudiantes resulta difícil, si es que los estudiantes consideran solo un valor aproximado sin una razón fundamental de su valor. Por ello, podemos usar GeoGebra y explicar el valor de ‘e; a partir de la construcción de un deslizador ‘a’ que toma como máximo valor el 30.

Además, se introduce el concepto de límite de la función $\lim_{a \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{a})^a$, cuando ‘a’ toma infinitos valores podemos ver el valor aproximado del numero ‘e’. (Ver la imagen 5)

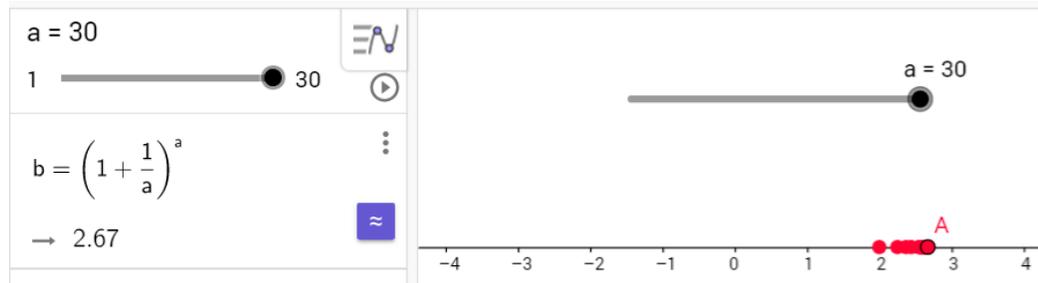


Figura 5. Vista CAS y Grafica del valor del numero irracional 'e'. (Elaboración propia, 2020)

En la imagen 5 se muestra el rastreo del valor que toma el número 'e' cuando varía el deslizador en el valor de 'a'. Consecuentemente, los estudiantes pueden modificar el valor del deslizador 'a', por ejemplo 5000, esto permitirá ver el valor aproximado cercano a 2,7182...

Finalmente, el uso de GeoGebra permite enfocar la atención de los procesos de creación, construcción, modelación y verificación de un problema y la interpretación de las soluciones. Adicionalmente, promueve el desarrollo del pensamiento numérico en los estudiantes al comprender diferentes representaciones del mismo concepto y hacer conexiones a diferentes contextos matemáticos y de la vida cotidiana. Para Almeida, Bruno y Perdomo-Díaz (2016) el pensamiento numérico tiene diferentes componentes: (1) comprender el significado de los números, (2) reconocer el valor relativo y absoluto de las magnitudes numéricas, (3) usar puntos de referencia al hacer cálculos numéricos, (4) componer y descomponer números, (5) utilizar diferentes representaciones de los números, (6) comprender el efecto relativo de las operaciones y (7) desarrollar estrategias apropiadas para evaluar si una respuesta es razonable.

Por lo tanto, el pensamiento numérico debe ser promovido desde los primeros años de la educación formal por su importancia para lograr el desarrollo de pensamiento matemático superior (Obando y Vásquez, 2008; Moroto y Arias, 2019). El desarrollo de este pensamiento no implica la repetición mecánica y algorítmica de procedimientos que no ayudan a comprender profundamente el concepto de sistema de numeración. Investigadores como Greeno (1991); Vilarroel (2009); Aucchuallpa y Abad (2019) señalan que el pensamiento numérico más allá de desarrollar una capacidad fundamental en el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes permite pensar en los estudiantes la manera lógica de dar soluciones de problemas numéricos sin precisar cálculos.

Conclusiones

La necesidad de desarrollar competencias en pensamiento numérico en los estudiantes permitirá tener un mejor desenvolvimiento en su vida cotidiana y serán la base sobre la cual se estructure el conocimiento matemático general. Por ello, es fundamental desarrollar este pensamiento desde la primera infancia, esto es, cuando los niños van empezando a comprender el concepto del número. Greeno (1991) caracteriza esto en tres aspectos: capacidad de hacer cálculos con fluidez, de hacer estimados y juicios e

inferencias. Por lo que, incorporar nuevas tecnologías como el uso de GeoGebra en el desarrollo del pensamiento numérico permite enfocar

la atención de los procesos de creación, construcción, modelación y verificación de un problema y la interpretación de las soluciones a partir del uso de las diferentes vistas del software.

Referencias

- Almeida, R., Bruno, A., & Perdomo-Díaz, J. (2016). Strategies of number sense in pre-service secondary mathematics teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(5), 959- 978.
- Auccahuallpa, R., y Abad, J. V. (2019). El proceso etnomatemático del contar mediante la *Uña Taptana*. *Segundo encuentro Latinoamericano de Etnomatemática, Campus de Sarapiquí – Costa Rica*. 1-7.
- Bishop, A. (1999). Enculturación matemática. Madrid: Paidós
- Cárdenas-Soler, R., Piamonte-Contreras, S., y Gordillo- Catellanos, P. (2017). Desarrollo del pensamiento numérico. Una estrategia: el animaplano. *Pensamiento y acción*, 23. 31-48.
- Castro, E. (1994). Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años). *Tesis Doctoral*. Granada: Comares.
- D' Ambrosio, U. (2013). *Etnomatemáticas. Entre las tradiciones y la modernidad*. México: Díaz de Santos.
- Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for research in Mathematics Education*, 22 (3), 170-218.
- Guarnizo, M. (2015). La cultura del emprendimiento y la empresarialidad en instituciones educativas de Colombia: realidades y oportunidades. *Revista Logos Ciencia & Tecnología*, 233.
- León-Salinas, C. E. (2017). El pensamiento covariacional y GeoGebra: herramientas para la explicación científica de algunas realidades. *Tecné, Episteme y Didaxis, TED*, 42, 159-171.
- Maroto, A. P., y Arias, I. (2019). Desarrollo del pensamiento numérico en los primeros años de la educación primaria: la suma y resta de números naturales. *XV CIAEM-IACME*, Medellín, Colombia, 1-9.
- Obando, G. y Vásquez, N. (2008). Pensamiento numérico del preescolar a la educación básica. Documento presentado en el Encuentro colombiano de matemática educativa.
- Pabón Gómez, J. A., Nieto Sánchez, Z. C., y Gómez Colmenares, C. A. (2015). Modelación matemática y GeoGebra en el desarrollo de competencias en jóvenes investigadores. *Revista Logos, Ciencia & Tecnología*, 7 (1), 65-70.
- Pari, A., y Aucahuallpa, R. (2019). *Percepciones del profesorado sobre las TIC (GeoGebra) como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas en la*

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. París: Armand Collins.

Rico, L. (1996). *Pensamiento numérico*. Recuperado de <https://w>

Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. Tesis de maestría no publicada. Programa de Matemática Educativa, CICATA-IPN. México.

Van Luit, J. E. H., y Van de Rijt, B. A. M. (1997). Stimulation of early mathematical competence. En M, Beishuizen, K. Gravemeijer, y E. van Leishout (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp.215-238). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Institute.

Villaruel Villamor, J. D. (2009). Origen y desarrollo del pensamiento numérico: una perspectiva multidisciplinar. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 555-604.